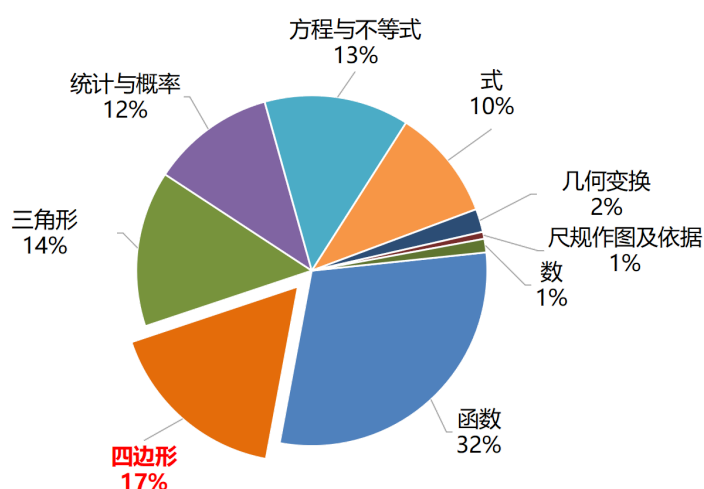


第1讲 四边形中的最值问题

平行四边形属于人教版第十八章的内容，是期中、期末考试的重要知识点，主要考察平行四边形的性质和判定，故这部分我们分为《平行四边形》、《四边形的最值和折叠问题》、《四边形的中点问题》、《正方形专题》、《四边形综合》五个模块。本模块为《四边形中的最值与折叠问题》，旨在帮助学生了解四边形最值与折叠问题的常见题型，理清解题思路。

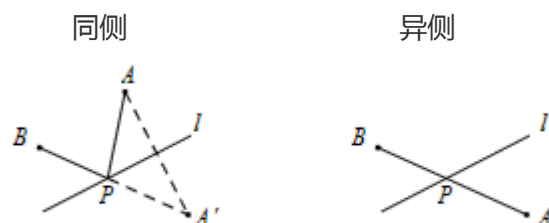
本模块难度较大，适用于平行四边形最值与折叠问题的专项突破，本模块分为四边形中的最值问题、四边形中的折叠问题2讲内容，帮助学生梳理综合题的解题思路，学会将所学知识进行综合运用。



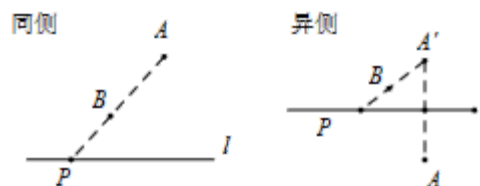


一、将军饮马问题

🕒 线段和最小

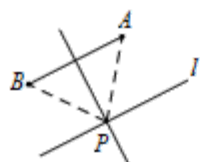


🕒 线段差最大

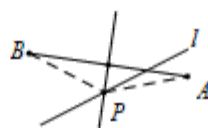


🕒 线段差最小

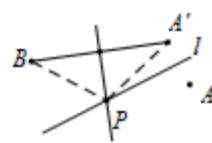
同侧



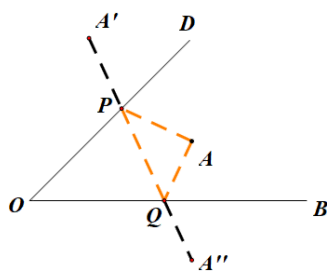
异侧



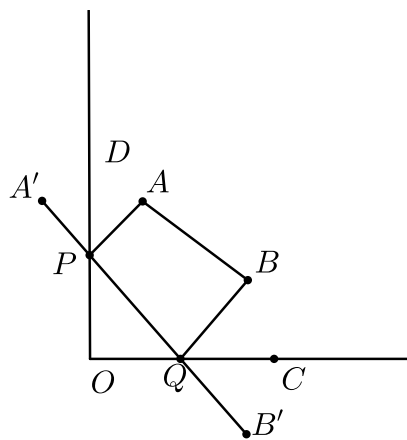
异侧



💡 三角形周长最小



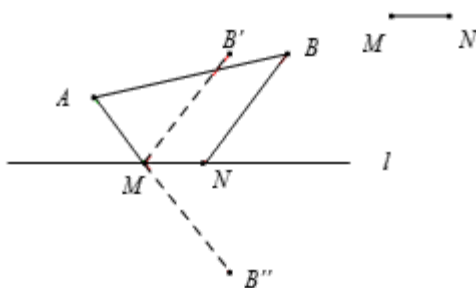
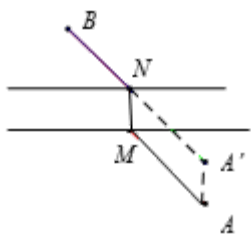
💡 四边形周长最小



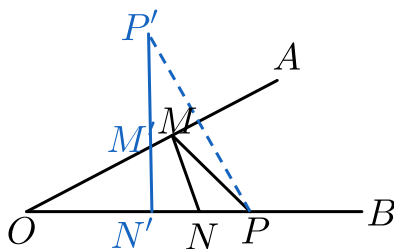
💡 过河最短距离

类型一

类型二

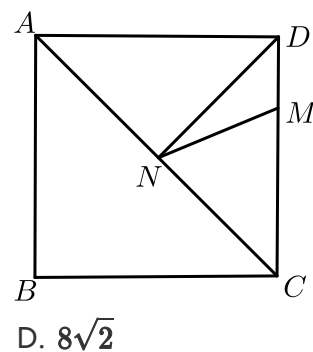


垂线段最短



例题1

1. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为8， M 在 CD 上，且 $DM = 2$ ， N 是 AC 上一动点，则 $DN + MN$ 的最小值为（ ）。



A. 6

B. 8

C. 10

D. $8\sqrt{2}$

【答案】 C

【解析】 连接 BN ，由正方形的对称性，知 $DN = BN$ ，
则 $DN + MN$ 的最小值即为 $BN + MN$ 的最小值，
也就是线段 BM 的长．连接 BM ．

在 $\text{Rt}\triangle BCM$ 中，

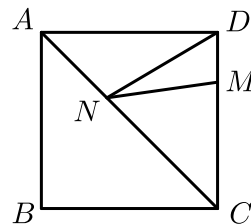
$$BM^2 = BC^2 + CM^2 = 8^2 + (8 - 2)^2,$$

$$\therefore BM = 10.$$

故选C .

【标注】【知识点】线段和的最小值

2. 如图，正方形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， M 是 DC 上的一点，且 $DM = 2$ ， N 是 AC 上的一动点，求 $|DN - MN|$ 的最小值与最大值（ ）.



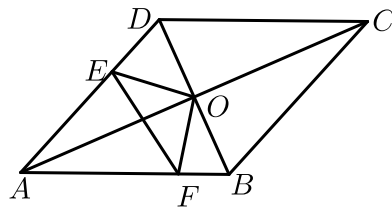
- A. 0, 1 B. 0, 2 C. 1, 1 D. 1, 2

【答案】B

【解析】当 $DN = MN$ 时， $|DN - MN|$ 有最小值为0，
此时点 N 位于 DM 的垂直平分线与 AC 的交点处。
 $|DN - MN| \leq DM = 2$ ，
当点 N 与点 C 重合时，等号成立，此时有最大值2。

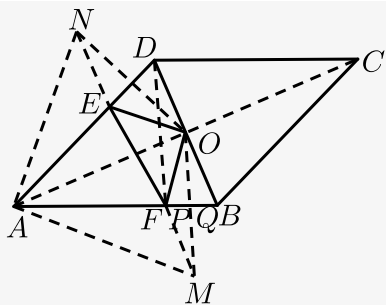
【标注】【知识点】线段差的绝对值最大

3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 E ， F 分别是边 AD ， AB 上的点，连接 OE ， OF ， EF 。 $AB = 7$ ， $BC = 5\sqrt{2}$ ， $\angle DAB = 45^\circ$ ，则 $\triangle OEF$ 周长的最小值是 _____。



【答案】 $\frac{13\sqrt{2}}{2}$

【解析】如图，



作点 O 关于 AB 的对称点 M ,

点 O 关于 AD 的对称点 N ,

连接 MN 交 AB 于 F ,

交 AD 于 E , 连接 OM 交 AB 于 Q ,

则 $\triangle OEF$ 的周长最小,

$\triangle OEF$ 周长的最小 = MN ,

由作图得: $AN = AO = AM$, $\angle NAD = \angle DAO$,

$\angle MAB = \angle BAO$,

$\because \angle DAB = 45^\circ$, $\therefore \angle MAN = 90^\circ$,

过 D 作 $DP \perp AB$ 于 P ,

则 $\triangle ADP$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AP = DP = \frac{\sqrt{2}}{2} AD.$$

$$\because AD = BC = 5\sqrt{2}, \therefore AP = DP = 5.$$

$$\because OM \perp AB, \therefore OQ \parallel DP.$$

$$\because OD = OB,$$

$$\therefore OQ = \frac{1}{2} DP = \frac{5}{2},$$

$$BQ = \frac{1}{2} BP = \frac{1}{2} (AB - AP) = 1,$$

$$AQ = 6.$$

$$\therefore AO = \sqrt{AQ^2 + OQ^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{13}{2},$$

$$\therefore AM = AN = AO = \frac{13}{2},$$

$$\therefore MN = \sqrt{2} AM = \frac{13\sqrt{2}}{2},$$

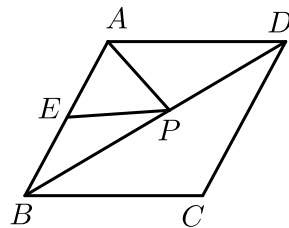
$$\therefore \triangle OEF \text{ 周长的最小值是 } \frac{13\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{13\sqrt{2}}{2}.$$

【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

练习1

4. 如图，已知菱形 $ABCD$ 的周长为16，面积为 $8\sqrt{3}$ ， E 为 AB 的中点，若 P 为对角线 BD 上一动点，则 $EP + AP$ 的最小值为（ ）。



A. 2

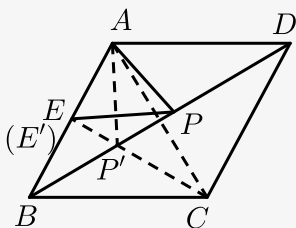
B. $2\sqrt{3}$

C. 4

D. $4\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】如图作 $CE' \perp AB$ 于 E' ，交 BD 于 P' ，连接 AC 、 AP' 。



$\because$ 已知菱形 $ABCD$ 的周长为16，面积为 $8\sqrt{3}$ ，

$\therefore AB = BC = 4$ ， $AB \cdot CE' = 8\sqrt{3}$ ，

$\therefore CE' = 2\sqrt{3}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BCE'$ 中， $BE' = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$ ，

$\therefore BE = EA = 2$ ，

$\therefore E$ 与 E' 重合，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore BD$ 垂直平分 AC ，

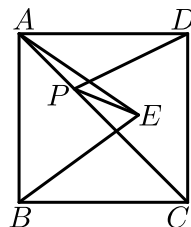
$\therefore A$ 、 C 关于 BD 对称，

$\therefore$ 当 P 与 P' 重合时， $P'A + P'E$ 的值最小，最小值为 CE 的长 $= 2\sqrt{3}$ ，

故选B。

【标注】【知识点】线段和的最小值

5. 如图，正方形 $ABCD$ 的面积为16， $\triangle ABE$ 是等边三角形，点 E 在正方形 $ABCD$ 内，在对角线 AC 上有一点 P ，使 $PD + PE$ 的和最小，则这个最小值为（ ）。



A. $\sqrt{8}$

B. 3

C. 4

D. $\sqrt{32}$

【答案】C

【解析】连接BD、PB、PD关于AC对称，

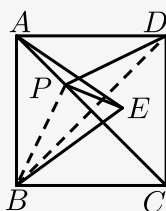
$$\therefore PB = PD,$$

$$\therefore PD + PE = PB + PE,$$

当B、P、E三点共线得

$$PD + PE \text{ 最小},$$

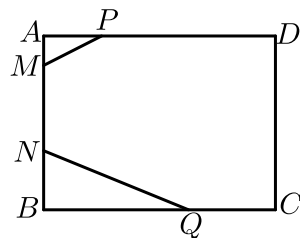
$$\therefore (PD + PE)_{\min} = BE = AB = 4, \text{ 选C}.$$



【标注】【知识点】两点之间线段最短

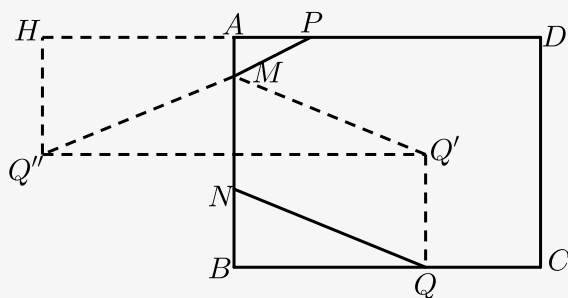
|| 例题2

6. 如图，矩形ABCD中， $AB = 6$ ，MN在边AB上运动， $MN = 3$ ， $AP = 2$ ， $BQ = 5$ ， $PM + MN + NQ$ 最小值是 _____ .



【答案】 $3 + \sqrt{58}$

【解析】作 $QQ' \perp AB$ ，使得 $QQ' = MN = 3$ ，作点 Q' 关于直线AB的对称点 Q'' ，连接 PQ'' 交AB于M，此时 $PM + MN + NQ$ 的值最小．作 $Q''H \perp DA$ 于H．



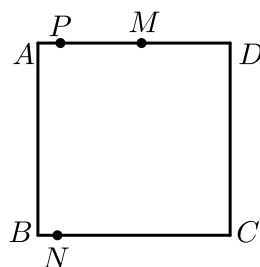
在 $\text{Rt}\triangle PHQ''$, $PQ'' = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}$,

$\therefore PM + MN + NQ$ 的最小值 $= 3 + \sqrt{58}$.

【标注】【知识点】线段和的最小值

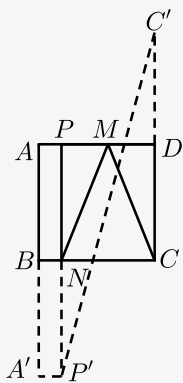
练习2

7. 如图，在边长为8正方形 $ABCD$ 中， P 是 AD 边上一点，且 $AP = 1$ ， N 、 M 分别是 BC 、 PD 上的动点，小球 Q 从点 A 出发沿 $AP - PN - NM - MC$ 的路线运动，则折线 $APNMC$ 的最小值为 _____ .



【答案】26

【解析】作 C 点关于 AD 的对称点 C' ，作 P 点关于 BC 的对称点 P' ，

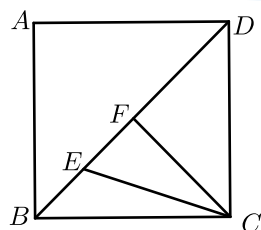


作 A 关于 BC 的对称点 A' ，连接 $A'P'$ ， $P'C'$ ，

折线 $APNMC$ 的最小值为 $A'P' + P'C' = 1 + 25 = 26$.

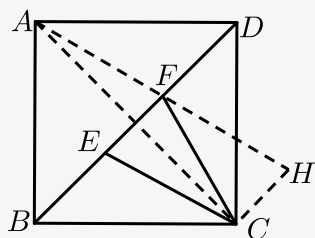
【标注】【知识点】线段和的最小值

8. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为6， E ， F 是对角线 BD 上的两个动点，且 $EF = 2\sqrt{2}$ ，连接 CE ， CF ，则 $\triangle CEF$ 周长的最小值为 _____ .



【答案】 $2\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$

【解析】 如图作 $CH \parallel BD$ ，使得 $CH = EF = 2\sqrt{2}$ ，连接 AH 交 BD 于 F ，则 $\triangle CEF$ 的周长最小，



$\therefore CH = EF, CH \parallel EF,$

$\therefore$ 四边形 $EFHC$ 是平行四边形，

$\therefore EC = FH,$

$\therefore FA = FC,$

$\therefore EC + CF = FH + AF = AH,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AC \perp BD,$

$\therefore CH \parallel DB,$

$\therefore AC \perp CH,$

$\therefore \angle ACH = 90^\circ,$

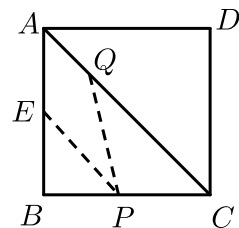
在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中， $AH = \sqrt{AC^2 + CH^2} = 4\sqrt{5}$

$\therefore \triangle EFC$ 的周长的最小值 $= 2\sqrt{2} + 4\sqrt{5}.$

【标注】 【知识点】正方形的性质

|| 例题3

9. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E 是 AB 的中点，点 P 是边 BC 上的动点，点 Q 是对角线 AC 上的动点（包括端点 A, C ），则 $EP + PQ$ 的最小值是 _____。



【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】 作点 E 关于直线 BC 的对称点 E' ，连接 BE' ，

作 $E'Q \perp AC$ ，与 BC 交于点 P ，

$\because$ 点 E' 是点 E 关于直线 BC 的对称点，

$\therefore EP = E'P$ ，

$\therefore$ 点 E' 到直线 AC 的最短距离即为垂直距离，

$\therefore$ 当 $E'Q \perp AC$ 时 $E'Q$ 最短，即为 $EP + PQ$ 的最小值，

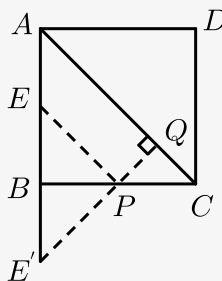
$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 4，

又 $\because \angle AQE' = 90^\circ$ ， $\angle QAE' = \angle E' = 45^\circ$ ，且点 E 为 AB 的中点，

$\therefore AE' = 6$ ，

$\therefore E'Q = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ ，

$\therefore EP + PQ$ 的最小值是 $3\sqrt{2}$ 。



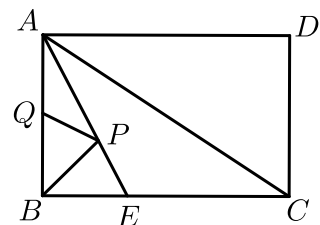
【标注】 【知识点】 垂线段最短

【知识点】 轴对称的性质

【能力】 推理论证能力

练习3

10. 矩形 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ， $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 E ， P 、 Q 分别是 AE 、 AB 上的动点，则 $PB + PQ$ 的最小值是 ()。



A. 5

B. $\frac{7}{2}$

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{12}{5}$

【答案】D

【解析】过B作 $BH \perp AC$ 于H，交AE于P，过P作 $PQ \perp AB$ 于Q，

$\therefore AE$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore PH = PQ$ ，

$\therefore BH = PB + PH = PB + PQ$ ，

则BH即为PB + PQ的最小值，

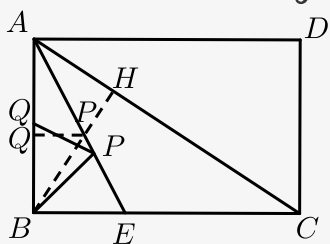
$\therefore$ 矩形ABCD中， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$ ，

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} AC \cdot BH$ ，

$\therefore BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{12}{5}$ 。

$\therefore PB + PQ$ 的最小值是 $\frac{12}{5}$ 。



【标注】【知识点】动点与特殊平行四边形问题

二、线段最值问题

1. 构造对角线求最值

四边形	对角线的性质
平行四边形	
矩形	
菱形	
正方形	

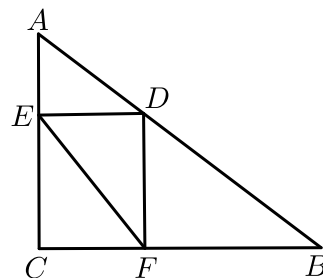
【教法备注】

四边形	对角线的性质
平行四边形	互相平分
矩形	相等且平分
菱形	互相垂直平分
正方形	相等且互相垂直平分

这部分需要利用四边形对角线的性质将问题进行转化，最终利用“垂线段最短”求解。

例题4

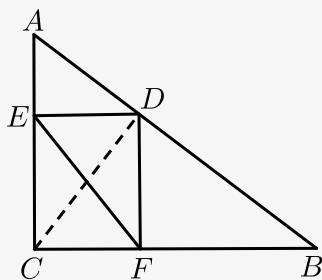
11. 如图所示，在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ， D 是 AB 上一动点，过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E ， $DF \perp BC$ 于点 F ，连接 EF ，则线段 EF 的最小值是（ ）。



- A. 5 B. 4.8 C. 4.6 D. 4.4

【答案】 B

【解析】 如图，连接 CD 。



在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，
 $AC = 6$ ， $BC = 8$ ，
 $\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$ 。
 $\because DE \perp AC$ ， $DF \perp BC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，
 $\therefore$ 四边形 $CFDE$ 是矩形，
 $\therefore EF = CD$ 。

由垂线段最短可得：当 $CD \perp AB$ 时，线段 EF 的值最小，

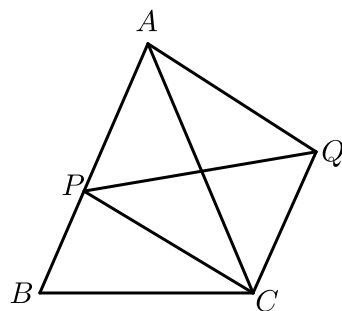
$$\text{此时 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} AB \cdot CD,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = \frac{1}{2} \times 10 \times CD,$$

解得 $CD = 4.8$ ，故选B.

【标注】【知识点】利用垂线段最短求最值

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 45^\circ$ ， $AB = AC = 8$ ， P 为 AB 边上一动点，以 PA 、 PC 为边作平行四边形 $PAQC$ ，则对角线 PQ 的最小值为 _____ .



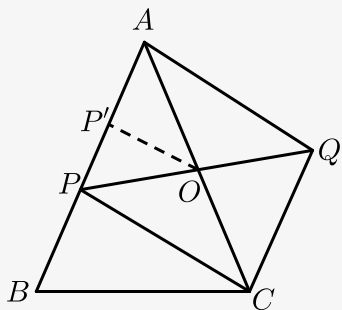
【答案】 $4\sqrt{2}$

【解析】 $\because$ 四边形 $APCQ$ 是平行四边形，

$$\therefore AO = CO, OP = OQ,$$

$\therefore PQ$ 最短也就是 PO 最短，

$\therefore$ 过 O 作 $OP' \perp AB$ 于 P' ，



$$\because \angle BAC = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle AP'O$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore AO = \frac{1}{2} AC = 4,$$

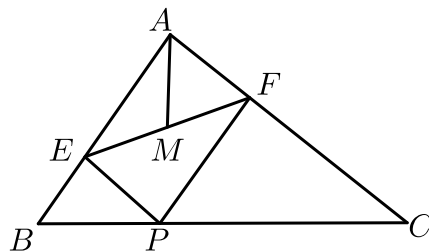
$$\therefore OP' = \frac{\sqrt{2}}{2} AO = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore PQ \text{的最小值} = 2OP' = 4\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】利用垂线段最短求最值

练习4

13. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AC = 4$ ， P 为边 BC 上一动点（ P 不与 B 、 C 重合）， $PE \perp AB$ 于 E ， $PF \perp AC$ 于 F ， M 为 EF 中点，则 AM 的取值范围是_____。



【答案】 $\frac{6}{5} \leq AM < 2$

【解析】 易证：四边形 $AEPF$ 为矩形， $BC = 5$ ，

$$\therefore AM = \frac{1}{2} AP,$$

当 $AP \perp BC$ 时， AP 取得最小值，

$$\text{此时 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AP \times BC$$

$$= \frac{1}{2} \times AB \times AC,$$

$$\therefore AP = \frac{12}{5},$$

$$\therefore AM \text{ 最小值为 } \frac{6}{5},$$

当 P 与 C 重合时， AP 取得最大值4，

$\therefore P$ 不与 B 、 C 重合，

$$\therefore AP < 4,$$

$$\therefore AM < 2,$$

$$\therefore \frac{6}{5} \leq AM < 2.$$

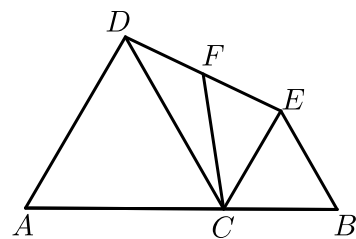
【标注】【能力】运算能力

【知识点】垂线段最短

【知识点】矩形的判定及应用

【知识点】矩形的性质

14. 如图，已知 $AB = 6$ ， C 是线段 AB 上一动点，分别以 AC 、 CB 为边作等边三角形 ACD 和 BCE ，连接 DE ， F 为 DE 中点，则 CF 的最小值是_____。



【答案】 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

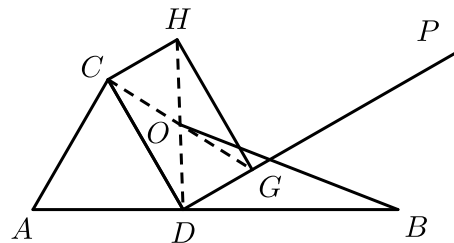
【解析】略

【标注】【知识点】等边三角形的性质

【知识点】垂线段最短

【能力】推理论证能力

15. 如图所示，线段 AB 的长为 $20\sqrt{2}\text{cm}$ ，点 D 在线段 AB 上， $\triangle ACD$ 的边长为 10cm 的等边三角形，过点 D 作 CD 垂直的射线 DP ，过 DP 上一动点 G （不与 D 重合）作矩形 $CDGH$ ，记矩形 $CDGH$ 的对角线交点为 O ，连接 OB ，则线段 BO 的最小值为_____。



【答案】 $10\sqrt{2}\text{cm}$

【解析】连接 CG 、 HD 。

$\because$ 四边形 $CDGH$ 是矩形， CG 、 HD 交于点 O ，

$\therefore CO = DO$ 。

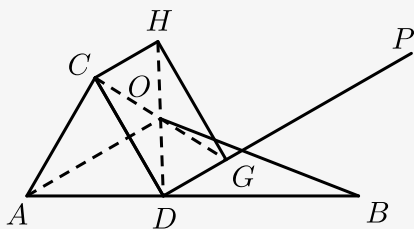
又 $\because AC = AD$ ，

$\therefore AO \perp CD$ ，且 AO 平分 CD 。

$\therefore BO$ 的最小值是点 B 到 CD 的中垂线的距离；

$\therefore \triangle AOB$ 是直角三角形，

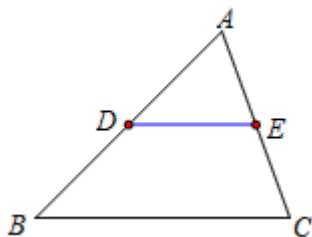
$\therefore BO = \frac{1}{2}AB = 10\sqrt{2}$ （ 30° 所对的直角边是斜边的一半）。



【标注】【知识点】垂线段最短；矩形的性质

2. 中位线最值问题

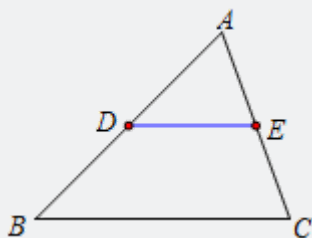
中位线定理：三角形的中位线_____于三角形的第三边，并且_____第三边的_____。



如图：_____

【教法备注】

中位线定理：三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半。

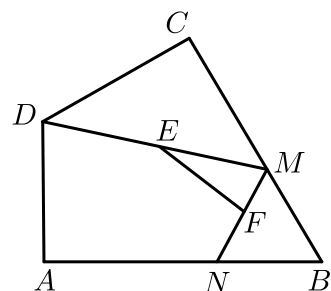


如图， $DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$

这部分内容首先需要找出是哪个三角形的中位线，然后转化为“勾股定理”或“垂线段最短”求解最值。

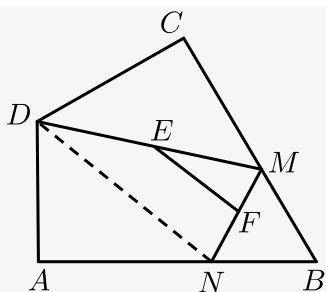
|| 例题5

16. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{5}$ ， $AD = 2$ ，点 M ， N 分别为线段 BC ， AB 上的动点（含端点，但点 M 不与点 B 重合），点 E ， F 分别是 DM ， MN 的中点，则 EF 长度的最大值为_____。



【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】如图，连接 DN ，



$$\because DE = EM, FN = FM,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}DN,$$

当点N与点B重合时，DN的值最大即EF最大，

在Rt△ABD中，

$$\because \angle A = 90^\circ, AD = 2, AB = 2\sqrt{5},$$

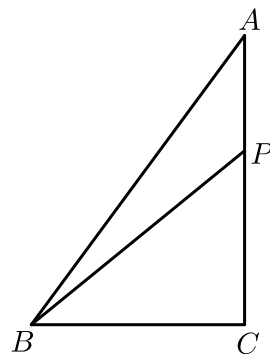
$$\therefore BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore EF \text{ 的最大值} = \frac{1}{2}BD = \sqrt{6}.$$

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

练习5

17. 如图，在Rt△ABC中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 8$ ， $BC = 6$ ，P为AC边上的一动点，以PB，PA为边构造平行四边形APBQ，则对角线PQ的最小值为（ ）。



A. 4

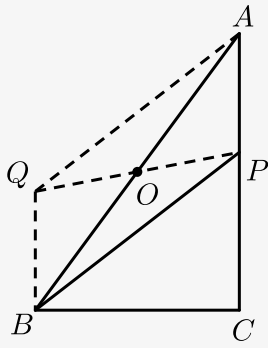
B. 6

C. 8

D. 10

【答案】 B

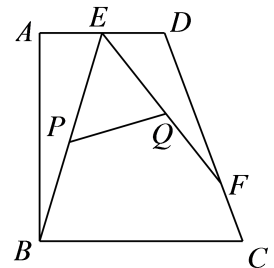
【解析】 以PB，PA为边构造平行四边形APBQ，
连接PQ与AB交于点O，



$\therefore$ 四边形 $APBQ$ 是平行四边形 ,
 $\therefore OP = \frac{1}{2}PQ$, $OA = \frac{1}{2}AB$,
 $\therefore$ 若使 PQ 最小 , 只需令 OP 最小 ,
 $\therefore$ 当 $OP \perp AC$ 时 , OP 最小 ,
 $\therefore OP \perp AC$, $\angle C = 90^\circ$,
 $\therefore \angle APO = \angle C = 90^\circ$,
 $\therefore OP \parallel BC$,
 $\therefore \triangle AOP \sim \triangle ABC$,
 $\frac{OP}{BC} = \frac{OA}{AB}$,
 $\frac{OP}{6} = \frac{1}{2}$,
 $OP = 3$,
 $\therefore PQ = 2OP = 2 \times 3 = 6$.
 故选 **B** .

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

18. 如图所示 , 已知四边形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, E 、 F 分别是 DA 、 DC 上的动点 , P 、 Q 分别是 BE 、 EF 的中点 . 若 $BC = 10$, $AB = 6\sqrt{3}$, 则 PQ 的取值范围是 _____ .



【答案】 $\frac{5\sqrt{3}}{2} \leq PQ \leq \sqrt{31}$

【解析】连接 BD ，过点 D 作 $DG \perp BC$ 于 G ，

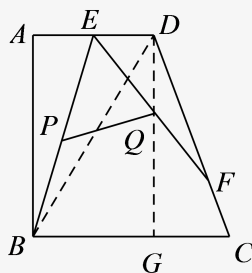
$$\therefore DG = 6\sqrt{3}, GC = 6, BG = 4$$

$$\therefore BD = 2\sqrt{31} > 10,$$

$$\therefore PQ = \frac{1}{2}BF,$$

当 F 与 D 点重合时， BF 有最大值，

当 $BF \perp CD$ 时， BF 有最小值。



【标注】【知识点】中点类综合计算与证明

3. 利用三边关系求解最值

三角形第三边的取值范围：_____ < 第三边 < _____

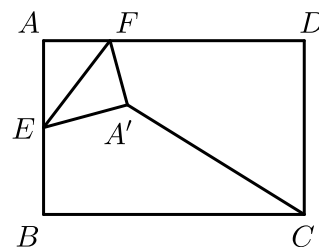
【教法备注】

三角形第三边的取值范围：两边之差 < 第三边 < 两边之和

这部分与翻折进行了综合，首先要根据翻折找出定长的边，然后利用三边关系进行求解（利用三边关系求解时，需满足另外两边的长为定长）

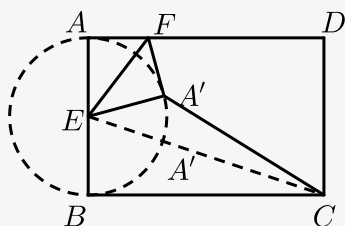
|| 例题6

19. 如图，在矩形纸片 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $AD = 3$ ，点 E 是 AB 的中点，点 F 是 AD 边上的一个动点，将 $\triangle AEF$ 沿 EF 所在直线翻折，得到 $\triangle A'EF$ ，则 $A'C$ 的长的最小值是 _____。



【答案】 $\sqrt{10} - 1$

【解析】方法一：连 EC ，



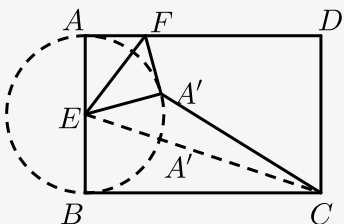
在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中, $EC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$,

由题意得 $AE = BE = EA' = 1$,

在 $\triangle EA'C$ 中, $A'C \geq EC - EA'$,

$\therefore A'C_{\min} = \sqrt{10} - 1$.

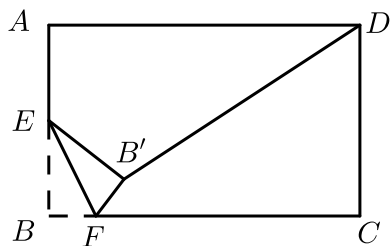
方法二: 如图, $EA' = EA = 1$, 故点 A' 在以 E 为圆心, EA 为半径的圆上, 连接 CE 交圆形于点 A' , 此时 $A'C$ 最小即为所求, $A'C = CE - A'E = \sqrt{10} - 1$.



【标注】【知识点】瓜豆原理（轨迹与最值）：轨迹为弧

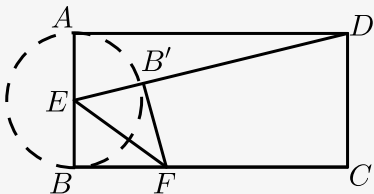
练习6

20. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $AD = 8$, E 是 AB 边的中点, F 是线段 BC 的动点, 将 $\triangle EBF$ 沿 EF 所在直线折叠得到 $\triangle EB'F$ 连接 $B'D$, 则 $B'D$ 的最小值是 _____.



【答案】 $\sqrt{73} - 3$

【解析】 如图所示点 B' 在以 E 为圆心 EA 为半径的圆上运动, 当 D 、 B' 、 E 共线时时, 此时 $B'D$ 的值最小,



根据折叠的性质, $\triangle EBF \cong \triangle EB'F$,

$\therefore EB' \perp B'F$,

$\therefore EB' = EB$,

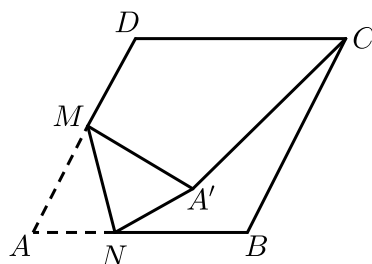
$\therefore E$ 是 AB 边的中点, $AB = 6$,

$$\begin{aligned}\therefore AE &= EB' = 3, \\ \therefore AD &= 8, \\ \therefore DE &= \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}, \\ \therefore B'D &= \sqrt{73} - 3.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】矩形的性质

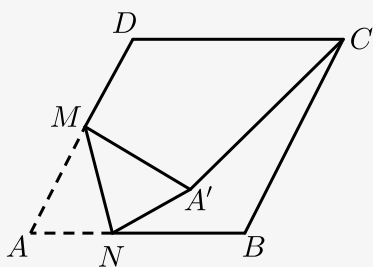
【知识点】轴对称的性质

21. 如图，在边长为4的菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， M 是 AD 边的中点，点 N 是 AB 边上一动点，将 $\triangle AMN$ 沿 MN 所在的直线翻折得到 $\triangle A'MN$ ，连接 $A'C$ ，则线段 $A'C$ 长度的最小值是_____。



【答案】 $2\sqrt{7} - 2$

【解析】如图所示：



$\therefore MA'$ 是定值， $A'C$ 长度取最小值时，即 A' 在 MC 上时，
过点 M 作 $MF \perp DC$ 于点 F ，
 $\therefore$ 在边长为4的菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， M 是 AD 中点，
 $\therefore MD = 2$ ， $\angle FDM = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle FMD = 30^\circ$ ，
 $\therefore FD = \frac{1}{2}MD = 1$ ，
 $\therefore FM = DM \times \cos 30^\circ = \sqrt{3}$ ，
 $\therefore MC = \sqrt{FM^2 + CF^2} = 2\sqrt{7}$ ，
 $\therefore A'C = MC - MA' = 2\sqrt{7} - 2$ 。

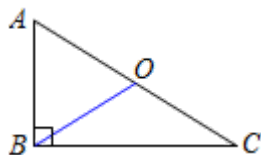
故答案为： $2\sqrt{7} - 2$ 。

【标注】【知识点】菱形的性质

【知识点】旋转的性质

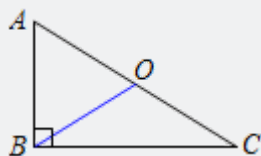
4. 构造斜边中线求最值

由矩形的性质可以推出，直角三角形的性质：**直角三角形斜边上的中线等于**_____。



【教法备注】

由矩形的性质可以推出，直角三角形的性质：**直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半**。



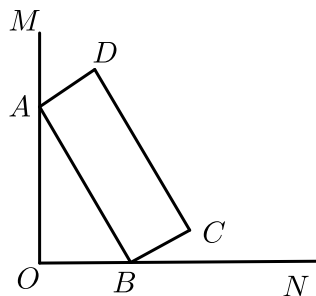
总结：

- ① 在直角三角形中，如果遇到斜边中点，优先考虑应用直角三角形斜边中线的性质。
- ② 遇到直角三角形，可尝试取斜边中点，并连接直角顶点，应用直角三角形斜边中线的性质。
- ③ 注意一定在已知直角三角形的前提下才能应用直角三角形斜边中线的性质。
- ④ 注意在应用直角三角形拓展的时候一定要证明，不可以当定理直接使用的。

这部分内容需要构造直角三角形斜边的中线，然后转化为**三角形三边关系**求解最值。

|| 例题7

22. 如图， $\angle MON = 90^\circ$ ，矩形 $ABCD$ 的顶点 A 、 B 分别在边 OM 、 ON 上，当 B 在边 ON 上运动时， A 随之在 OM 上运动，矩形 $ABCD$ 的形状保持不变，其中 $AB = 2$ ， $BC = 1$ ，运动过程中，点 D 到点 O 的最大距离为_____。



【答案】 $\sqrt{2} + 1$

【解析】取 AB 中点 E ，连接 OD 、 OE 、 DE ，

$$\because \angle MON = 90^\circ, AB = 2,$$

$$\therefore OE = AE = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$\because BC = 1$ ，四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AD = BC = 1,$$

$$\therefore DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

根据三角形的三边关系， $OD < OE + DE$ ，

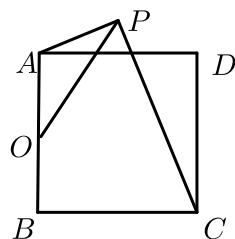
$\therefore$ 当 OD 过点 E 是最大，最大值为 $\sqrt{2} + 1$ 。

【标注】【知识点】矩形的性质

【知识点】三角形的三边关系

练习7

23. 如图，正方形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， O 为 AB 的中点， P 为正方形 $ABCD$ 外一动点，且 $AP \perp CP$ ，则线段 OP 的最大值为（ ）。



A. $4 + 4\sqrt{2}$

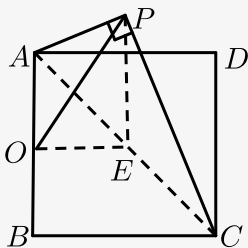
B. $2 + 4\sqrt{2}$

C. $4\sqrt{2}$

D. 6

【答案】A

【解析】如图，连接 AC ，取 AC 的中点 E ，



$\because$ 正方形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， O 为 AB 的中点，

$$\therefore AC = 8\sqrt{2}, OE = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

$\because AP \perp CP$ ，

$$\therefore PE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2},$$

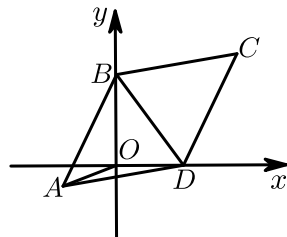
由三角形的三边关系得， O 、 E 、 P 三点共线时 OP 最大，

此时 $OP_{\text{最大}} = 4\sqrt{2} + 4$.

故选A .

【标注】【知识点】直接用勾股求边长

24. 如图，已知菱形 $ABCD$ 中， $BC = 10$ ， $\angle BCD = 60^\circ$ 两顶点 B 、 D 分别在平面直角坐标系的 y 轴、 x 轴的正半轴上滑动，连接 OA ，则 OA 的长的最小值是 _____ .



【答案】 $5\sqrt{3} - 5$

【解析】 如图所示：过点 A 作 $AE \perp BD$ 于点 E ，

当点 A ， O ， E 在一条直线上，此时 AO 最短，

$\because$ 菱形 $ABCD$ 中， $BC = 10$ ， $\angle BCD = 60^\circ$ ，

$\therefore AB = AD = CD = BC = 10$ ，

$\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$ ，

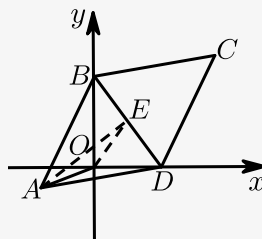
$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形，

$\therefore AE$ 过点 O ， E 为 BD 中点，则此时 $EO = \frac{1}{2}BD = 5$ ，

故 AO 的最小值为： $AO = AE - EO = AB \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \times BD = 5\sqrt{3} - 5$.

故答案为： $5\sqrt{3} - 5$.

【标注】【知识点】线段和的最小值

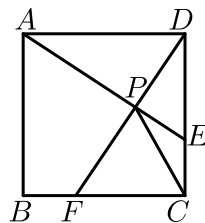


|| 例题8

【知识点拨】

这部分内容需要先利用全等证明直角三角形，然后再求解最值

25. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，动点 E ， F 分别从 D ， C 两点同时出发，以相同的速度在边 DC ， CB 上移动，连接 AE 和 DF 交于点 P ，由于点 E ， F 的移动，使得点 P 也随之运动，若 $AD = 2$ ，线段 CP 的最小值是 () .



A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{5} - 1$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】 B

【解析】 $\because$ 动点 E, F 分别从 D, C 两点同时出发, 以相同的速度在边 DC, CB 上移动,

$$\therefore DE = CF,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle DCF$ 中,

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADE = \angle DCF = 90^\circ, \\ DE = CF \end{cases}$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CDF,$$

$$\because \angle CDF + \angle ADF = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADF + \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APD = 90^\circ,$$

取 AD 的中点 O , 连接 OP ,

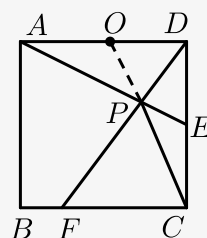
$$\text{则 } OP = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ (不变)},$$

根据两点之间线段最短得 C, P, O 三点共线时线段 CP 的值最小,

在 $\text{Rt}\triangle COD$ 中, 根据勾股定理得,

$$CO = \sqrt{CD^2 + OD^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore CP = CO - OP = \sqrt{5} - 1.$$



【标注】 【能力】 运算能力

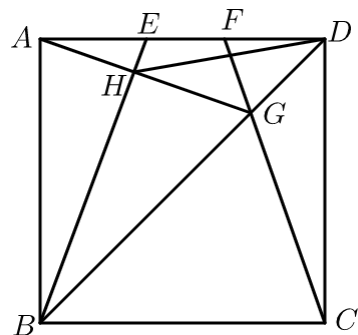
【知识点】 线段的和差的证明

【知识点】 正方形的性质

【思想】 数形结合思想

练习8

26. 如图, E, F 是正方形 $ABCD$ 的边 AD 上两个动点, 满足 $AE = DF$. 连接 CF 交 BD 于点 G , 连接 BE 交 AG 于点 H . 若正方形的边长为 2, 则线段 DH 长度的最小值是 _____.



【答案】 $\sqrt{5} - 1$

【解析】 方法一：在正方形 $ABCD$ 中， $AB = AD = CD$ ， $\angle BAD = \angle CDA$ ， $\angle ADG = \angle CDG$ ，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCF$ 中，
$$\begin{cases} AB = DC \\ \angle BAD = \angle CDA \\ AE = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF (\text{SAS})$ ， $\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，

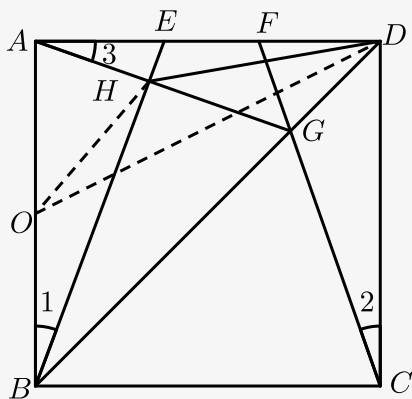
在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle CDG$ 中，
$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADG = \angle CDG \\ DG = DG \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle CDG (\text{SAS})$ ， $\therefore \angle 2 = \angle 3$ ， $\therefore \angle 1 = \angle 3$ ，

$\therefore \angle BAH + \angle 3 = \angle BAD = 90^\circ$ ， $\therefore \angle 1 + \angle BAH = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AHB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ，

如图，取 AB 的中点 O ，连接 OH 、 OD ，



则 $OH = AO = \frac{1}{2}AB = 1$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中， $OD = \sqrt{AO^2 + AD^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ，根据三角形的三边关系， $OH + DH > OD$ ，

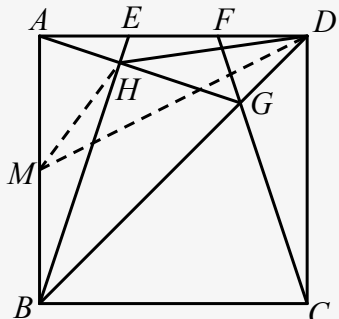
$\therefore$ 当 O 、 D 、 H 三点共线时， DH 的长度最小，最小值 $= OD - OH = \sqrt{5} - 1$ 。

方法二：可以理解为点 H 是在以 AB 为直径的半圆 $\widehat{AB}$ 上运动，当 O 、 H 、 D 三点共线时， DH 长度最小。易证 $\triangle AHB$ 为直角三角形，

故答案为： $\sqrt{5} - 1$.

方法三：由题意可证 $BE \perp AH$,

取 AB 中点 M , 连接 DM ,



则 $DM = \sqrt{5}$, $MH = \frac{1}{2}AB = 1$,

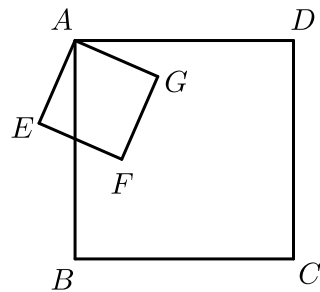
$\therefore DH \geq DM - MH = \sqrt{5} - 1$.

【标注】【知识点】瓜豆原理（轨迹与最值）：轨迹为其他

5. 旋转最值问题

|| 例题9

27. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4cm ，正方形 $AEFG$ 的边长为 2cm . 正方形 $AEFG$ 绕点 A 旋转的过程中，线段 CF 的长的最小值为 _____ cm .



【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】如图所示，

点 F 的轨迹是以 A 为圆心， AF 为半径的圆，

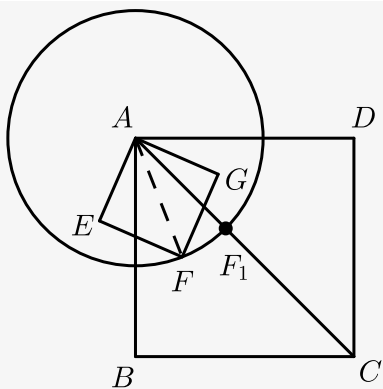
连接 AC ，交 $\odot A$ 于点 F_1 ，则 CF_1 为 CF 的最小值，

$\because AE = 2$, $AB = 4$,

$\therefore AF = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} = AF_1$,

$AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$,

$\therefore CF_1 = AC - AF_1 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.



【标注】【知识点】正方形的性质

【知识点】勾股定理

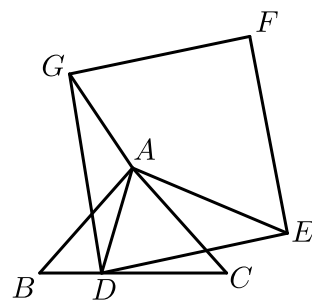
【知识点】勾股定理的综合应用

【知识点】旋转的性质

【能力】运算能力

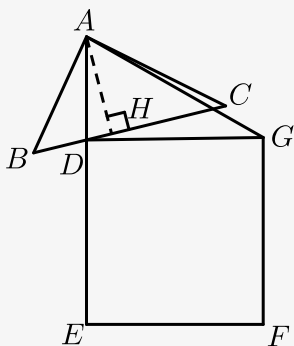
练习9

28. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 6$ ， D 为 BC 边一点，且 $BD : DC = 1 : 2$ ，以 D 为一个顶点作正方形 $DEFG$ ，且 $DE = BC$ ，连接 AE ，将正方形 $DEFG$ 绕点 D 旋转一周，在整个旋转过程中，当 AE 取得最大值时 AG 的长为 _____。



【答案】 $2\sqrt{23}$

【解析】如图，



当A、D、E三点在同一直线上，且点D在线段AE上时，AE最大，

此时 $\angle ADG = 180^\circ - \angle ADG = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 6$ ，

由勾股定理得 $BC = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ ，

$\therefore DE = BC$ 且四边形DGFE为正方形，

$\therefore DE = DG = GF = FE = 6\sqrt{2}$ ，

$\therefore BD : DC = 1 : 2$ ，

$\therefore BD = \frac{1}{3}BC = 2\sqrt{2}$ ， $DC = \frac{2}{3}BC = 4\sqrt{2}$ ，

作 $AH \perp BC$ 于点H，

则 $AH = HB = HC = 3\sqrt{2}$ ，

$\therefore DH = BH - BD = \sqrt{2}$ ，

在Rt $\triangle AHD$ 中， $AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = 2\sqrt{5}$ ，

在Rt $\triangle ADG$ 中， $AG = \sqrt{AD^2 + DG^2} = 2\sqrt{23}$ 。

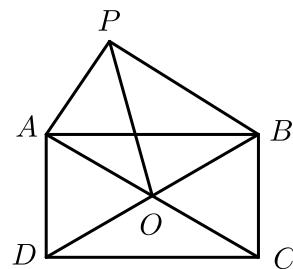
【标注】【知识点】正方形的性质

【知识点】旋转的性质

【知识点】旋转性质综合应用

【能力】推理论证能力

29. 如图，已知点P是矩形ABCD外一动点， $AB = \sqrt{3}AD$ ，对角线AC、BD相交于点O，且 $PA = 3$ ， $PB = 4$ ，则PO的最大值为_____。

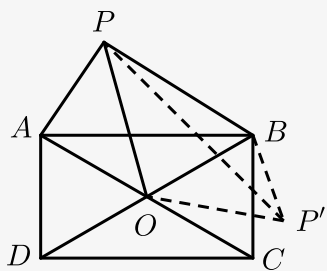


【答案】 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

【解析】 $\angle AOB = 120^\circ$ 。

将 $\triangle AOP$ 绕点O顺时针旋转 120° 至 $\triangle POP'$ ，连接 BP' ， PP' 。则：

$BP' = AP = 3$ 。



$\triangle POP'$ 为顶角 120° 的等腰三角形 .

$$PP' = \sqrt{3}PO .$$

由 $\triangle PBP'$, $PB + P'B > PP'$, 当 P 、 B 、 P' 三点共线时可取 “=” .

当 $\angle APB = 60^\circ$ 时共线 .

$$\therefore PP'_{\max} = PB + P'B = 7 .$$

$$\sqrt{3}PO_{\max} = 7 ,$$

$$\therefore PO_{\max} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} .$$

【标注】【知识点】旋转性质综合应用